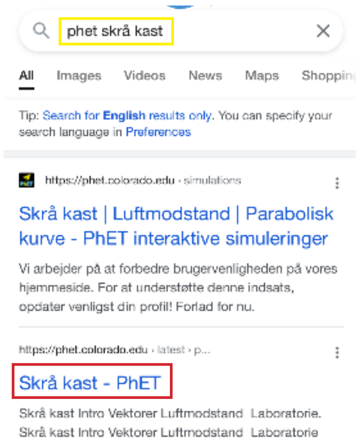
Parabler og kanonkugler

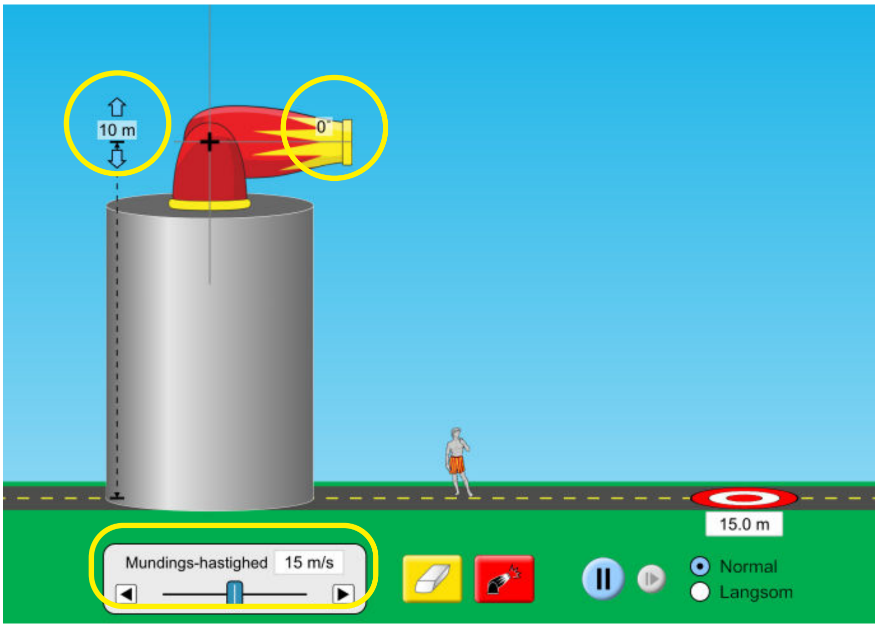
På PhETs hjemmeside via https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_da.html kan man se, hvor langt en ting kommer, når man skyder den ud af en kanon.
Søg på "phet skrå kast" for at finde siden.



Vælg Intro, når I starter simuleringen. I kan ændre på

- kanonens **højde** over jorden
- kanonløbets **vinkel**
- kuglens mundings**hastighed** ved affyring

De er markeret med gult på billedet.



Prøv jer først frem. Affyr kanonen nogle gange og se, hvad der sker.

Se derefter opgaver på næste side af papiret.

Støttet af
novo nordisk fonden

*science talenter

astra*

Parabler og kanonkugler

Opgaver om indstillinger

Brug evt skemaet nederst på siden til at skrive dine resultater i.

1. Prøv at ramme målskiven, når den er 15 meter væk.
2. Prøv at ramme målskiven, når den er 30 meter væk.
3. Prøv at ramme målskiven, når den er 2 meter væk.
4. Prøv at ramme målskiven, når den er 15 meter væk med en hastighed på 9 m/s.
5. Prøv at ramme målskiven, når den er 15 meter væk fra en højde på 2 m over Jorden.
6. Prøv at ramme målskiven, når den er 15 meter væk med en vinkel på 0°. Derefter med en vinkel på 85°.
7. Hvad skal man gøre for at skyde så langt som muligt?

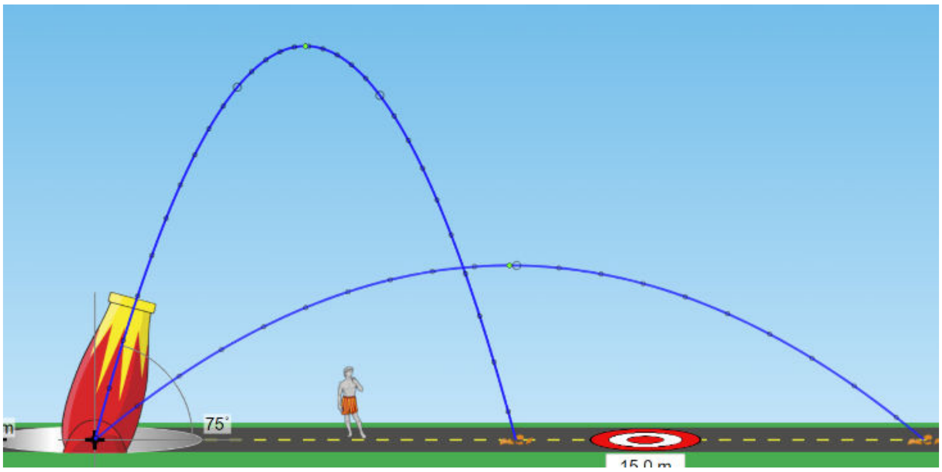
Afstand til målskive	Højde over Jorden	Vinkel	Hastighed

Støttet af
novo nordisk fonden

Parabler og kanonkugler

Opgaver fortsat

Kuglerne følger parabelbaner. En parabel kan være bred eller smal, høj eller lav.



8. Hvad bestemmer om parablen er smal eller bred?

9. Hvad bestemmer hvor højt oppe parablens toppunkt er?

10. Beskriv med dine egne ord, hvad alle parabler har til fælles.

11. Lav en opgave til din sidemand af typen “Ram målskiven, når den er .... væk med en højde / vinkel / hastighed på ....“

Støttet af
novo nordisk fonden

*science talenter

astra*

Hvad giver max toppunkt og skudlængde?

Her kommer tre påstand om parabelbaner for kanonskud.
Undersøg, om de er sande eller falske. Prøv at variere vinkel og mundingshastighed. Lad kanonen stå i højden *h = 0* over Jorden.

1. Skuddet bliver længst ved vinklen v = 45°.

Hvad vil I variere for at undersøge det?

Hvad observerer I?

2. Det eneste, der betyder noget for højden af parablen, er mundingshastigheden.

Hvad vil I variere for at undersøge det?

Hvad observerer I?

3. Med en vinkel på v = 45° er skudlængden 4 gange skudhøjden.

Hvad vil I variere for at undersøge det?

Hvad observerer I?

Støttet af
novo nordisk fonden

*science talenter

astra*

Skrå kast og parabler

Til lærerne

Parabler geometrisk set og i vores omgivelser
I matematikundervisningen optræder parabler typisk som grafer for andengradspolynomier, $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Men parabler er også den kurve, en kastet bold følger, eller strålen fra en vandslange. Formålet med denne aktivitet er at knytte parabler sammen med en visuel forståelse, hvor parablerne er kendetegnet ved deres krumning og toppunkt, og hvor krumning og toppunkt bestemmes af de fysiske egenskaber hastighed og vinkel.

Teori

En parameterkurve for en kasteparabel med starthøjde h, mundingshastighed v og startvinkel α er

$$x(t) = |v| \cdot \cos(\alpha) \cdot t$$

$$y(t) = h + |v| \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$ hvor $g = 9{,}82\ m/s^2$ er tyngdeaccelerationen

Omregnet til cartesiske koordinater får vi

$$y(x) = h + \tan(\alpha) \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$$

Skrevet på formen $y(x) = c + b \cdot x + a \cdot x^2$ ser vi, at

$c = h$	kuglens starthøjde over jorden er skæringspunktet med y-aksen
$b = \tan(\alpha)$	koefficienten til x er hældningen af starthastigheds-vektoren
$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v^2 \cdot \cos^2(\alpha)}$	koefficienten til x^2 er det dobbelte af parablens krumning med modsat fortegn. Den vokser med startvinklen α og aftager med mundingshastigheden v.

Den maksimale højde er $y_{max} = h + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{g}$

Den er størst ved store værdier af h, α og v.

Den maksimale bredde når $h = 0$, er $x_{max} = \frac{2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot v^2}{g} = \frac{\sin(2\alpha) \cdot v^2}{g}$

Den er størst ved store værdier af v, og ved en vinkel på $\alpha = 45°$.
Når $\alpha = 45°$ er $\cos(\alpha) = \sin(\alpha)$. I dette tilfælde er $x_{max} = 4y_{max}$.
Parablen ved $\alpha = 45°$ er 4 gange så bred, som den er høj.

På **dette GeoGebra-ark** kan man se parablen både udtrykt ved en ligning (***f(x)*, rød**) og som parameterfremstilling (***g*, blå**).

Støttet af
novo nordisk fonden

*science talenter

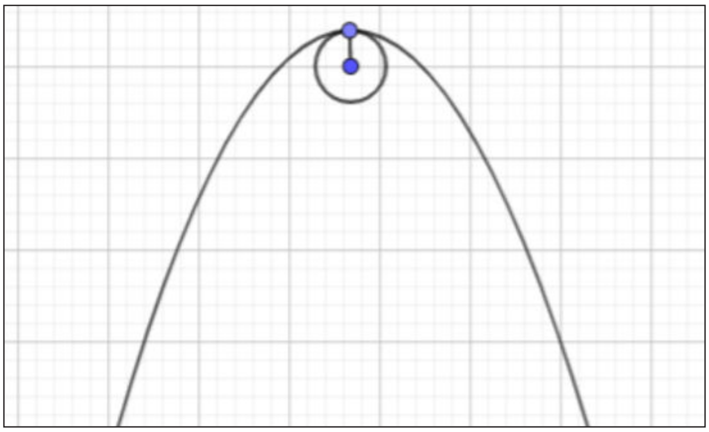
astra*

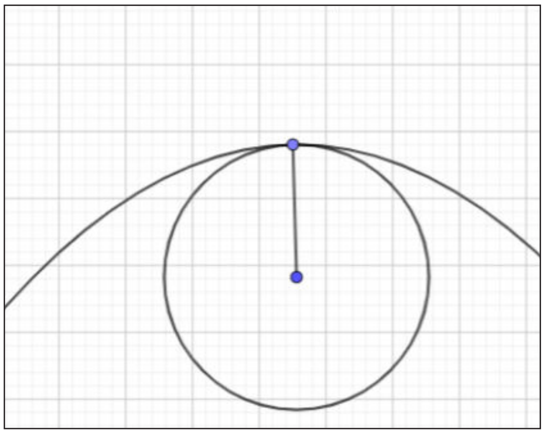
Læringsmål

Skrå Kast arket

Lad eleverne besvare spørgsmålene på elevarket og diskutér deres iagttagelser.
Når eleverne har arbejdet med parabler i PhET, har de forhåbentlig set, at:

- Alle parabler er **symmetriske**.
- Alle parabler har netop ét **toppunkt** og 2 parabelgrene.
- Symmetriaksen går gennem toppunktet.
- Man kan **forskyde** en parabel op og ned v.h.a. h uden at faconen ændres.
- Parabler i PhET peger grenene nedad.
- Parabler kan være brede eller smalle.
- De bliver brede, hvis v er stor og α er lille.
- Parabler kan være høje eller lave. De bliver høje, hvis h, v og α er store.
- Parabler har en **krumning**, der fortæller hvor skarpt "svinget" i toppunktet er. Hvis krumningen er stor, er radius i en cirkel, der tangerer toppunktet, lille. Og omvendt.





Max toppunkt og skudlængde arket

Øvelsen kan følges op af, at man lader eleverne undersøge de 3 påstande på s. 4 om maximal højde og skudlængde af en parabel, når $h = 0$.

Brug dette ark til de hurtige, eller lav matrixgruppearbejde: eleverne inddeles i grupper, der undersøger en påstand hver. De blandes til nye grupper af (mindst) 3 elever, sådan at alle 3 påstande er blevet undersøgt af (mindst) et af gruppemedlemmerne. Lad eleverne forklare deres overvejelser og resultater fra første runde gruppearbejde for hinanden i de nye grupper.

Perspektivering

Øvelserne kan bruges til at diskutere f.eks. tyngdekraft og acceleration i fysik. Arket giver også mulighed for at tale om luftmodstand og vektorer.

Eller man kan arbejde med parablens ligning $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ i matematik og kæde konstanterne a, b og c sammen med h, v og α.

Støttet af
novo nordisk fonden

Mulige svar

Ram 15m på flere måder

Afstand til målskive	Højde over Jorden	Vinkel	Hastighed
15	10	45	9
15	2	10	16
15	2	85	30
15	15	0	0

Undersøg 3 påstande

1. Skuddet bliver længst ved vinklen v = 45°.

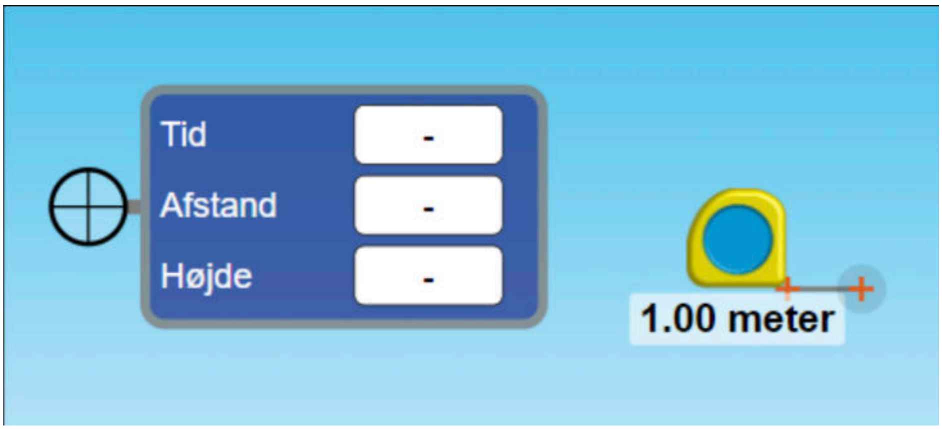
Sandt. Hold hastigheden fast og variér vinklen.

2. Det eneste, der betyder noget for højden af parablen, er mundingshastigheden.

Falsk. Vinklen spiller også en rolle. Begge skal være så store som muligt.

3. Med en vinkel på v = 45° er skudlængden 4 gange skudhøjden.

Sandt. Vis evt eleverne, hvordan man bruge Sigtekorn og Målebånd i PhET



Støttet af
novo nordisk fonden